ANALYSIS

Extremwertaufgaben

Teil 2:

Anwendungsaufgaben

Datei Nr. 49011

Stand 18. Juli 2008

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Diese Sammlung von Sachwert-Extremaufgaben enthält zunächst einmal auch Aufgaben aus der Datei 18025 aus den Klassen 9/10, in der Extremwertaufgaben behandelt werden, die auf quadratische Funktionen zurückgehen. Weil deren Schaubild eine Parabel darstellt, kann man dort das Maximum oder Minimum durch Berechnung des Parabelscheitels über quadratische Ergänzung durchführen. Alternativ dazu wurde hier natürlich die Berechnung der Extremwerte mittels Ableitungen und Randwertuntersuchung durchgeführt.

Diese Sammlung an Aufgaben wird bei Gelegenheit erweitert. Sie enthält teilweise sehr schwere Aufgaben, deren Ableitungen hohe Anforderungen stellen (z. B. Wurzelfunktionen), und die sich daher auch als Aufgaben für CAS-Rechner eignen.

Jeder kann sich seine Aufgaben auswählen!

Beim Erstellen von Aufgaben – nach einer Anregung eines Schulbuches – bin ich auf Extremwertaufgaben gestoßen, die auf Funktionen mit 2 Variablen führen. Nun sind solche Funktionen nicht Stoff des Gymnasiums. Sie lassen sich aber problemlos bearbeiten, wenn man einen kleinen Trick anwendet. Ich habe für diese Aufgaben eine 3. Datei für Extremwerte angelegt. Denn sie fallen doch aus dem Rahmen. Lehrer, die mit CAS arbeiten, sollten sich diese Aufgaben unbedingt ansehen. Die doch etwas schwierigeren Umformungen lassen sich mit diesen Rechnern erledigen. Man muss dazu aber schon Wissen haben und die Geräte bedienen können. Vielleicht liefern sie Stoff für moderne Sach-Abitur-Aufgaben.

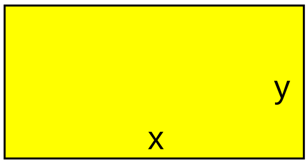
Inhalt

1. Extreme Flächenstücke

Einführungsaufgabe

1.1 Rechteck mit konstantem Umfang

Eine Endlosschnur hat die Länge 12 m. Daraus soll ein Rechteck geformt werden. Berechne seinen Flächeninhalt A(x) in Abhängigkeit von der Breite x des Rechtecks.



Für welchen Wert von x nimmt dieser einen Extremwert an?

Lösung

1. Schritt: Aufstellung der vorläufigen Zielfunktion

Es sei x die Breite des Rechtecks und y seine Höhe. Aus ihnen berechnet man den gesuchten Flächeninhalt durch die Formel: $A = x \cdot y$.

Genauer betrachtet ist das eine Funktion mit 2 Variablen x und y, weshalb man diese sogenannte Zielfunktion in der Regel so aufschreibt:

$$\boxed{A(x,y) = x \cdot y} \qquad (1)$$

2. Schritt: Herausfinden der Nebenbedingung

Da der Umfang mit 12 m vorgegeben ist, bedeutet dies, dass zwischen x und y ein vorgegebener Zusammenhang besteht, eine sogenannte **Nebenbedingung**. Sie lautet:

$$2x + 2y = 12 \quad \text{d.h.} \quad \boxed{x + y = 6}. \qquad (2)$$

Sie zeigt, dass man die beiden Variablen x und y nicht unabhängig voneinander wählen darf, denn diese Nebenbedingung muss ja stets erfüllt sein.

3. Schritt: Aufstellen der endgültigen Zielfunktion

Stellt man Gleichung (2), also $x + y = 6$ nach y um, erhält man $y = 6 - x$.

Ersetzt man damit y in (1), dann bleibt für die Zielfunktion nur noch eine Variable x übrig:

$$A(x) = x \cdot (6 - x)$$

$$A(x) = 6x - x^2 \qquad (3)$$

4. Schritt: Festlegung des Definitionsbereichs für die Zielfunktion

Die Zielfunktion hat auch einen eingeschränkten Definitionsbereich, denn zum Einhalten der Nebenbedingung gibt es für x bestimmte Einschränkungen.

So muss etwa x > 0 sein, andererseits aber auch x < 6.

Somit haben wir den Definitionsbereich: $D = \left]0;6\right[$

Bemerkungen:

Diese Einschränkungen verstehen Schüler oft nur schwer. Dabei geht es doch nur um Folgendes: Eine Rechtecksseite muss ja eine Länge haben, die größer ist als 0.
Damit ist $x > 0$ schon erklärt.
Die zweite Rechtecksseite ist y. Auch sie muss eine positive Länge haben. Aus $y > 0$ folgt wegen $y = 6 - x$, dann $6 - x > 0$, woraus man $x < 6$ erhält.
Man kann auch so darauf stoßen: Wenn $x + y > 6$ sein muss, dann kann keine Seite 6 oder mehr haben, weil es ja keine negativen Werte für Längen gibt.

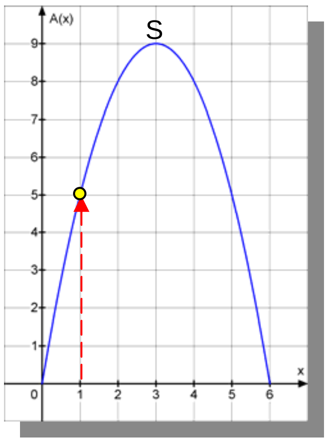
Was auf der Seite zuvor im roten Kasten aufgeschrieben worden ist, das sind nur die Vorbereitungen für die eigentliche Lösung der Aufgabe.

Gefragt war nun nämlich, für welches x dieser Flächeninhalt einen extremen Inhalt annimmt, also ein Maximum oder ein Minimum.

Vorüberlegung:

Die endgültige Zielfunktion für den Flächeninhalt lautete:

$A(x) = 6x - x^2$



Dies ist eine quadratische Funktion, deren Schaubild eine Parabel darstellt.

Schreibt man sie so auf: $A(x) = -x^2 + 6x$, dann hat sie die typische Form und man erkennt, dass (wegen des negativen Koeffizienten von x^2) die Parabel nach unten geöffnet ist.

Gibt man für x eine Breite vor, etwa x = 1, dann kann man den zugehörigen y-Werte, also die Höhe $y = 6 - 1 = 5$ berechnen und erhält einen Flächeninhalt von $A(1) = 5$.

In der Abbildung ist dies durch einen roten Pfeil gekennzeichnet. Von x = 1 aus führt der Pfeil nach oben zum gelben Kurvenpunkt, der bei A = 5 liegt!

So kann man zu jeder Breite x aus dem Definitionsbereich $D =]0;6[$ (d. h. 0 < x < 6) einen Flächeninhalt berechnen bzw. am Schaubild ablesen. Man erkennt aber auch, dass man für x = 3 zum höchsten Punkt der Parabel, also zu ihrem Scheitel S kommt. Dort bekommt man den größten Wert für A, also den maximalen Flächeninhalt.

Damit ist der Weg zur Lösung der Aufgabe aufgezeigt:

Zur Berechnung des extremen Flächeninhalts wird der Scheitel der zur Zielfunktion gehörenden Parabel berechnet.

In der Sekundarstufe 1 (Klasse 9/10) wird man den Parabelscheitel mittels quadratischer Ergänzung bestimmen, in der Oberstufe mit den Ableitungsfunktionen, was deutlich rascher geht.

Hier werden beide Lösungen gezeigt:

Extremwertberechnung mit quadratischer Ergänzung

Achtung: Die Kurvengleichung der Parabel darf man hier nicht mit y schreiben, also nicht so: $y = -x^2 + 6x$, denn y hat schon die Bedeutung der Rechteckshöhe. Also muss man eine neue Variable verwenden, etwa z.

$$z = -x^2 + 6x$$

Ausklammern von -1: $z = -\left(x^2 - 6x\right)$

Bemerkung zur Methode:

Die Klammer $\left(x^2 - 6x + ?\right)$ soll durch ein Quadrat ergänzt werden, so dass man diese Klammer durch einen quadratischen Term ersetzen kann.
Ergänzt man die Quadratzahl 9, dann klappt dies, denn es gilt ja:

$$\left(x^2 - 6x \boxed{+9}\right) = \left(x - \boxed{3}\right)^2$$

laut 2. binomischer Formel.
Doch wie findet man diese Quadratzahl 9?
Dazu muss man sich die binomische Formel ansehen:
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ enthält in der Mitte das sogenannte doppelte Produkt.
Diese Rolle übernimmt der Summand -6x. Durch Halbieren kommt man auf -3x.
Damit erkennt man, dass -3 die Zahl b in der Formel übernimmt.
Und ihr Quadrat ist 9. Daher wird man folgenden Rechenweg einschlagen:

$$z = -x^2 + 6x$$

Ausklammern von -1: $z = -\left(x^2 - 6x\right)$

Halbieren von -6 ergibt -3 mit dem Quadrat 9, also wird in der Klammer das Quadrat $\boxed{+9}$ ergänzt. Weil vor der Klammer der Faktor -1 steht, wurde auf der rechten Seite daher in Wirklichkeit -9 ergänzt. Zum Augleich schreibt man daher ans Ende wieder $\boxed{+9}$.

Man schreibt das so auf: $z = -\left(x^2 - 6x \boxed{+9}\right) + \boxed{9}$

In Kurzschreibweise: $z = -(x-3)^2 + 9$

Jetzt hat man die Scheitelform der Parabelgleichung erzeugt: $z = k \cdot \left(x - x_S\right)^2 + y_S$

Ergebnis: Parabelscheitel $S(3 \mid 9)$.

Für x = 3 erhält man somit das Maximum $A(3) = 9$.

Extremwertberechnung mit Trickrechnung

Es gibt hier eine Kurzlösung: Die Produktdarstellung $A(x) = x \cdot (6 - x) = -x^2 + 6x$

zeigt, dass die Funktion A die Nullstellen 0 und 6 hat.

Aus Symmetriegründen liegt daher der Parabelscheitel in der Mitte, also bei 3.

Weil diese Parabel nach unten geöffnet ist, hat die Flächeninhaltsfunktion A für $x = 3$ ein Maximum mit dem Wert: $A(3) = 3 \cdot (6 - 3) = 3 \cdot 3 = 9$.

Berechnet man zu x = 3 die zugehörige Breite y = 6 – x = 3, erkennt man sofort, dass es sich dabei um ein Quadrat handelt!

Extremwertberechnung mit Ableitungen

Die Zielfunktion lautet: $A(x) = -x^2 + 6x$

Ableitungen: $A'(x) = -2x + 6$

$A''(x) = -2$

Extremwertbedingung: $A'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_E = 3$

Kontrolle: $A''(3) = -2 < 0$

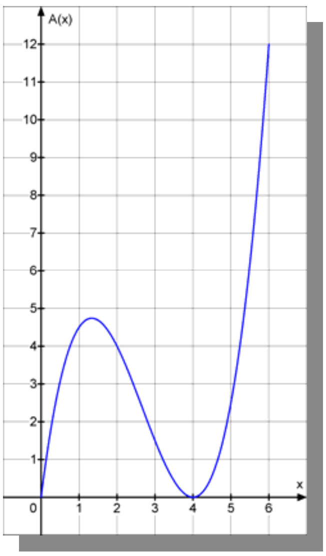
Also liegt ein Maximum vor.

Dieses hat den Wert: $A(3) = -9 + 18 = 9$

Auch hierzu eine Erklärung:

Die erste Ableitungsfunktion dient bekanntlich der Berechnung der Tangentensteigung. Mit der Extremwertbedingung $A'(x) = 0$ sucht man folglich nach Stellen, an denen die Kurve (hier die Parabel) eine waagerechte Tangente hat. Dies ist im Parabelscheitel der Fall. Die zweie Ableitungsfunktion bestimmt die Art der Krümmung. Bei einem negativen zweiten Ableitungswert liegt an der für x eingesetzten Stelle Rechtskrümmung vor. Daher ist der Parabelscheitel ein Hochpunkt. Die Funktion hat somit bei x = 3 einen maximalen Funktionswert.

Relatives oder absolutes Maximum?



Nehmen wir an, das rechte Schaubild gehört zu unserer Flächeninhaltsfunktion. Und nehmen wir an, dass wir herausgefunden haben, dass die Funktion für x = 1,4 ihr Maximum hat.

Dann müssen wir an Hand der Abbildung erkennen, dass es für den Wert x = 5,5 (z. B.) einen größeren Flächeninhalt gibt.

Das gefundene Maximum ist also nur ein relatives oder lokales Maximum, also beschränkt auf ein Intervall. Für den ganzen Definitionsbereich liegt hier der Maximalwert am rechten Rand!

Daher wird die Untersuchung der Randwerte von großer Bedeutung!

Randwertuntersuchung

Am linken Rand des Definitionsbereiches, also für $x = 0$ ist die Rechtecksbreite 0, (und wegen $y = 6 - x$ die Länge des Rechtecks 6, aber der Flächeninhalt ist 0 und damit der kleinste mögliche Wert. Am linken Rand haben wir somit den Randwert 0.

Dasselbe folgt für den rechten Rand bei $x = 6$. Dann wird $y = 6$ und wieder erhält man den Inhalt 0.

In der Oberstufe wird man das mit der Grenzwertschreibweise erledigen:

$$\lim_{x \to 0} A(x) = \lim_{x \to 0} \left(-x^2 + 6x\right) = 0$$
$$\lim_{x \to 6} A(x) = \lim_{x \to 6} \left(-x^2 + 6x\right) = 0$$

Eine oft gestellte Schülerfrage ist an dieser Stelle:

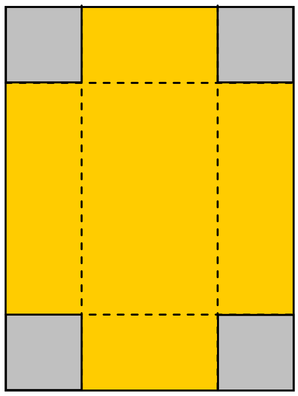
Warum schreibt man nicht einfach $A(0) = 0$ und $A(6) = 0$?

Die Antwort wird enttäuschend sein. Das ist eine reine aber wichtige Formsache. Denn wenn man wie hier $x = 0$ und $x = 6$ aus dem Definitionsbereich der Funktion A(x) ausgeschlossen hat (weil für diese Werte kein wirkliches Rechteck mehr vorliegt), dann darf man sie auch nicht einsetzen.
Die Grenzwertschreibweise hilft dann weiter, weil sie besagt, dass sich der Flächeninhalt dem Wert 0 nähert, wenn x gegen 0 oder gegen 6 geht.

Auswertung der Randwertuntersuchung:

Weil die Randwerte 0 sind, ist das Maximum der Flächeninhaltsfunktion sogar ein absolutes Maximum. (Es gibt also nirgendwo im Definitionsbereich der Funktion einen größeren Wert für den Inhalt des Rechtecks.)

2.2 Schnittmuster für eine einfache Schachtel



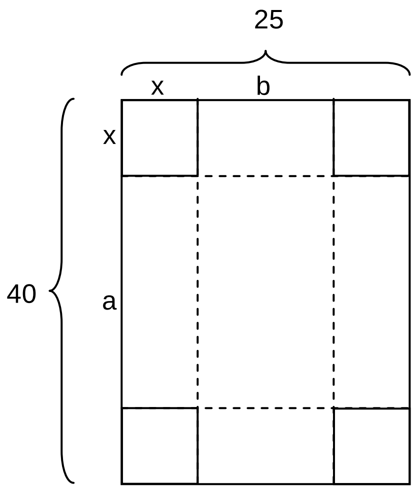
In der Klasse 5 werden in der letzten Stunde vor den Weihnachtsferien Schachteln aus buntem Karton gebastelt.

Zur Verfügung steht jedem Kind ein bunter Karton mit dem Format 25 cm auf 40 cm.

Die Kinder müssen zuerst herausfinden, wie gefaltet wird, und dass man, um eine vernünftiger Schachtel zu bekommen, an den Ecken gleich große Quadrate herausschneiden muss.

Die empor geklappten Seiten werden dann mit einem Klebeband zusammengehalten.

Am Ende gibt es einen kleinen Wettbewerb. Da jedes Kind auf seine Weise falten darf, entstehen Schachteln mir unterschiedlichem Fassungsvermögen. Es geht nun darum, wer die Schachtel mit dem maximalen Inhalt hergestellt hat. Dazu werden die Schachteln mit Sand befüllt. Wer am meisten Sand in seine Schachtel bekommen hat, der hat gewonnen.



Lösung

1. Schritt: Aufstellung der vorläufigen Zielfunktion (blaue Fläche)

$$V(a,b,x) = a \cdot b \cdot x \qquad (1)$$

Denn x wird zur Höhe der Schachtel.

2. Schritt: Herausfinden der Nebenbedingung

Auf der kurzen Seite gilt: $b + 2x = 25$

und auf der langen: $a + 2x = 40$

Stellt man diese Gleichungen nach b bzw. a um, kann man damit a und b in der Volumenformel (1) eliminieren.

$$b = 25 - 2x \qquad (2)$$

$$a = 40 - 2x \qquad (3)$$

3. Schritt: Aufstellen der endgültigen Zielfunktion

(2) und (3) in (1) einsetzen:

$$V(x) = (40 - 2x) \cdot (25 - 2x) \cdot x$$

$$V(x) = \left(1000 - 50x - 80x + 4x^2\right) \cdot x = \boxed{4x^3 - 130x^2 + 1000x}$$

4. Schritt: Festlegung des Definitionsbereichs für die Zielfunktion

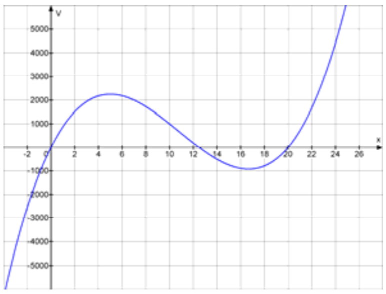
x muss sicher positiv sein, andererseits muss (an der kurzen Seite des Kartons) 2x kleiner als 25 cm sein, sonst bleibt für die Breite b der Schachtel nichts mehr übrig.

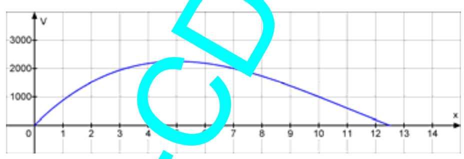
$$D_x = \left]\,0\,;12{,}5\,\right[$$

Die linke Abbildung zeigt uneingeschränkt das Schaubild der Funktion $f(x) = 4x^3 - 130x^2 + 1000x$.

Die rechte Abbildung zeigt den Ausschnitt, der zum Definitionsbereich passt.

Man erkennt den Hochpunkt bei etwa x = 5.





Extremwertberechnung mit Ableitungen

Zielfunktion: $V(x) = 4x^3 - 130x^2 + 1000x$

Ableitungen: $V'(x) = 12x^2 - 260x + 1000$

$V''(x) = 24x - 260$

Extremwertbedingung: $V'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 12x^2 - 260x + 1000 = 0 \quad | :4$

$$3x^2 - 65x + 250 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{65 \pm \sqrt{65^2 - 4 \cdot 3 \cdot 250}}{2 \cdot 3} = \frac{65 \pm \sqrt{4225 - 3000}}{6} = \frac{65 \pm \sqrt{1225}}{6} =$$

$$x_{1,2} = \frac{65 \pm 35}{6} = \begin{cases} \frac{100}{6} = \frac{50}{3} \approx 16{,}7 \notin D \\ 5 \end{cases}$$

Kontrolle: $V''(5) = 24 \cdot 5 - 260 = 120 - 260 < 0$

Also liegt bei $x_E = 5$ ein maximales Volumen vor.

Dieses hat übrigens den Wert (er war nicht gefragt!):

$$V(5) = 4 \cdot 5^3 - 130 \cdot 5^2 + 1000 \cdot 5$$

Schneller geht das über die Schachtelmaße:

$a = 40 - 2 \cdot 5 = 30, \quad b = 25 - 2 \cdot 5 = 15, \quad x = 5 \quad \Rightarrow \quad V = a \cdot b \cdot x = 30 \cdot 15 \cdot 5 = 2250\ (cm^3)$.

Über Randwerte muss man hier eigentlich nicht sprechen, denn es ist geometrisch klar, dass Für a = 0 keine Grundfläche existiert, also V = 0 wird und für a = 12,5 die Höhe der Schachtel 0 wird, was wieder zu V = 0 führt. Dies wurde bereits bei der Festlegung des Definitionsbereichs geklärt.

Bemerkung für Lehrer:

Diese Aufgabe gibt noch viel her.

Man kann in einer umfassenderen Aufgabe damit beginnen, dass eine Tabelle angibt, welche die Abmessungen x verschiedener Schachteln enthält, die von den Kindern hergestellt worden sind, zusammen mit dem Volumen, das aus unserer Zielfunktion berechnet worden ist.

x	2	4	6	8	10	12
V	1932	2856	2184	1728	1000	192

Die Aufgabe heißt dann, eine Skizze für die Funktion V zu erstellen und dann mit Regression (man sollte auf kubische Regression kommen) die Gleichung der Funktion V ermitteln.

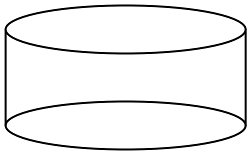
Noch netter wird es, wenn man von diesen berechneten Maßen weggeht und etwa 6 Beispiele nimmt, wie sie von Kindern gewählt worden sind, zusammen mit dem Ergebnis der (ungenauen) Volumenmessung durch die eingefüllte Sandmenge, die man dann über einen Messzylinder ermittelt.

Also etwa eine Tabelle wie diese:

x	3	4	5	6	7	9
V	1950	2190	2250	2200	2000	1370

Ich werde eine solche Aufgabe demnächst erstellen und dann beim Thema Regressionsaufgaben veröffentlichen.

2.5 Weitere Zylinderaufgaben



a) Welcher oben offene Zylinder hat bei gegebener Oberfläche ein maximales Volumen?

1. Schritt: <u>Aufstellung der vorläufigen Zielfunktion</u>

Volumen des Zylinders: $V(r,h) = G \cdot h = \pi r^2 \cdot h$ (1)

2. Schritt: <u>Herausfinden der Nebenbedingungen</u>

Die Oberfläche ist gegeben, also Mantel plus Boden.

Für sie gilt diese Formel: $O = 2\pi r \cdot h + \pi r^2$ (2)

3. Schritt: <u>Aufstellen der endgültigen Zielfunktion</u>

Man kann (2) nach h auflösen oder nach r:

(a) Umstellung nach h:

$$O = 2\pi r \cdot h + \pi r^2$$
$$2\pi r \cdot h = O - \pi r^2$$
$$h = \frac{O - \pi r^2}{2\pi r}$$

Dies ergibt diese Zielfunktion:

$$V(r) = \cancel{\pi} r^{\cancel{2}} \cdot \frac{O - \pi r^2}{2\cancel{\pi}\cancel{r}} = \tfrac{1}{2} Or - \tfrac{1}{2}\pi r^3 \qquad \text{(3a)}$$

(b) Umstellung nach r:

$$O = 2\pi r \cdot h + \pi r^2$$
$$\pi r^2 + 2\pi h \cdot r - O = 0$$
$$r_{1,2} = \frac{-2\pi h \pm \sqrt{4\pi^2 h^2 - 4 \cdot \pi \cdot (-O)}}{2\pi} = \frac{-2\pi h \pm \sqrt{4\pi^2 h^2 + 4\pi O}}{2\pi}$$
$$r_{1,2} = \frac{-2\pi h + 2\sqrt{\pi^2 h^2 + \pi O}}{2\pi} = \frac{-\pi h + \sqrt{\pi^2 h^2 + \pi O}}{\pi}$$
$$r = -h + \frac{\sqrt{\pi^2 h^2 + \pi O}}{\pi} = -h + \sqrt{\frac{\pi^2 h^2 + \pi O}{\pi^2}} = -h + \sqrt{h^2 + \frac{O}{\pi}}$$

Die zweite Lösung scheidet aus, weil sie einen negativen Radius ergibt.

Dies ergibt diese Zielfunktion:

$$V(r) = \pi \cdot \left(-h + \sqrt{h^2 + \frac{O}{\pi}}\right)^2 \cdot h \qquad \text{(3b)}$$

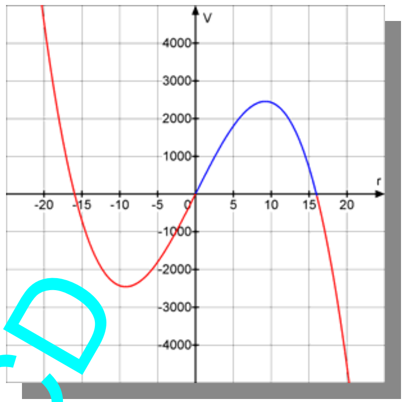
Es ist klar erkennbar, dass (3a) die wesentlich einfachere Funktion ist.

Beim genauen Hinsehen erkennt man dies sofort, eben weil die Umstellung nach r zum Lösen einer quadratischen Gleichung führt.

Ich habe diese Rechnung nur gezeigt und rate dringend von diesem Weg ab.

4. Schritt: <u>Festlegung des Definitionsbereichs für die Zielfunktion</u>

Für die Volumenfunktion in Abhängigkeit von r mit $V(r) = -\frac{1}{2}\pi r^3 + \frac{1}{2}Or$ muss r positiv sein, nach oben gibt es offenbar keine Grenze (?). $D = \left]\, 0\,;\infty \,\right[$.



Ich unterbreche hier die Rechnung, denn man ist doch gespannt, wie diese Funktion aussieht. Dazu muss man für O einen sinnvollen Wert annehmen.

Für das Schaubild habe ich O = 800 gewählt.
Für die Sachaufgabe ist nur der blaue Kurvenbogen sinnvoll.
Interessanterweise wird das Volumen für einen Radius größer als etwa 16 negativ.

Es ist eine reizvolle Aufgabe, dies zu beweisen.
Dazu sollte man eine Nullstellenbestimmung der Funktion durchführen:

Für O = 800 lautet sie: $V(r) = -\frac{1}{2}\pi r^3 + 400 \cdot r$

Nullstellenbedingung: $V(r) = 0$

Ausklammern von r: $r\left(-\frac{1}{2}\pi r^2 + 400\right) = 0$

1. Faktor: r = 0 scheidet aus.

2. Faktor: $-\frac{1}{2}\pi r^2 + 400 = 0$

$$\frac{1}{2}\pi r^2 = 400 \qquad (4)$$

$$r^2 = \frac{800}{\pi}$$

$$r = \sqrt{\frac{800}{\pi}} \approx 15{,}96$$

Als nächste müsste man zeigen, dass bei etwa r = 9 ein Extremwert liegt (das folgt noch, denn es ist ja die Aufgabe), und dann dass diese Funktion für $r \to \infty$ gegen $-\infty$ fällt.

Es gibt also für den Definitionsbereich doch eine obere Grenze. Das muss man sich so vorstellen: Wenn die Oberfläche bereits durch die Grundfläche verbraucht ist, dann bleibt für den Mantel nichts mehr übrig. Die Bodenfläche ist dann $\pi r^2 = 800$.
Das passt genau zu Gleichung (4). Dann liegt schon kein Zylinder mehr vor.

Wie löst man nun das Problem des Definitionsbereichs? Man sollte die geschilderte Überlegung darlegen (Boden = Oberfläche, also V = 0) und dann $r_{max} = 15{,}06$ berechnen.

Extremwertberechnung mit Ableitungen

Zielfunktion: $V(r) = -\frac{1}{2}\pi r^3 + \frac{1}{2}Or$

Ableitungen: $V'(r) = -\frac{3}{2}\pi r^2 + \frac{1}{2}O$

$V''(r) = -3\pi r$

Extremwertbedingung: $V'(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{3}{2}\pi r^2 + \frac{1}{2}O = 0 \qquad | \cdot 2$

$-3\pi r^2 + O = 0$

$3\pi r^2 = O$

$r = \sqrt{\frac{O}{3\pi}}$

Für das Beispiel mit O = 800 folgt dann $r = \sqrt{\frac{800}{3\pi}} \approx 9,2$ (cm).

Kontrolle: $V''(r) = -3\pi r < 0$ also liegt ein Maximum vor.

Randwerte: Für r gegen 0 wird der Zylinder zum inhaltslosen „Stab“, und wie besprochen geht er für r gegen $\sqrt{\frac{800}{\pi}}$ gegen den Boden, also zum Inhalt 0.

Also liegt sogar ein absolutes Maximum vor.

Dieses hat den Wert: $V_{max} = V\left(\sqrt{\frac{O}{3\pi}}\right) = -\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{O}{3\pi}}^{\,3} + \frac{1}{2}O\cdot\sqrt{\frac{O}{3\pi}} = -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{O}{3\pi}\cdot\sqrt{\frac{O}{3\pi}} + \frac{O}{2}\cdot\sqrt{\frac{O}{3\pi}}$

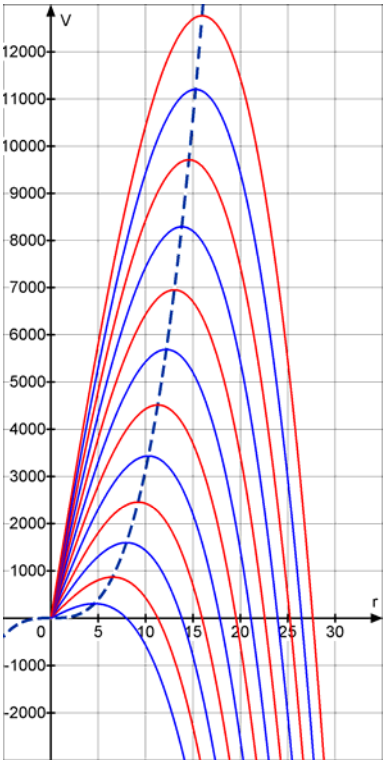
$V_{max} = -\frac{O}{6}\cdot\sqrt{\frac{O}{3\pi}} + \frac{O}{2}\cdot\sqrt{\frac{O}{3\pi}} = \frac{2}{6}O\cdot\sqrt{\frac{O}{3\pi}} = \boxed{\frac{O}{3}\cdot\sqrt{\frac{O}{3\pi}}}$

Noch ein Nachschub

Man kann die Gleichung $V(r) = -\frac{1}{2}\pi r^3 + \frac{1}{2}Or$ als Funktionenschar betrachten.

In der üblichen Funktionsschreibweise etwa so:
$f_t(x) = -\frac{\pi}{2}\cdot x^3 + \frac{1}{2}t\cdot x$.

Mit MatheGrafix gibt das diese Kurvenschar:



Ich habe die Ortskurve der Hochpunkte eingezeichnet.

Mit haben errechnet, dass man für $r = \sqrt{\frac{O}{3\pi}}$ das Maximum

$V = \frac{O}{3}\cdot\sqrt{\frac{O}{3\pi}}$ erhält, also ist $H\left(\sqrt{\frac{O}{3\pi}} \,\middle|\, \frac{O}{3}\sqrt{\frac{O}{3\pi}}\right)$

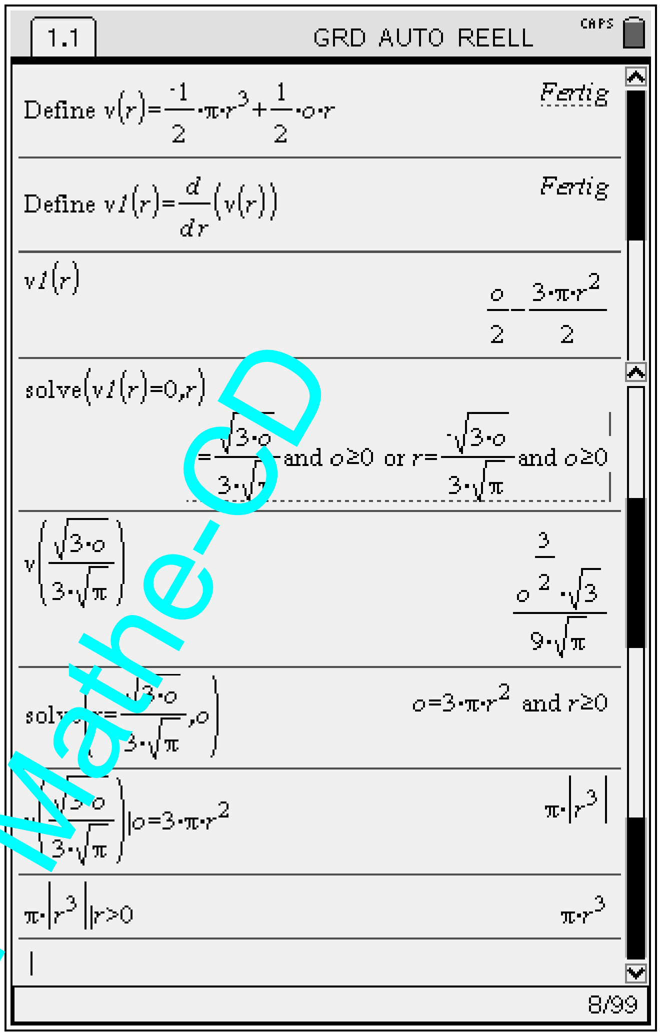
Aus $r = \sqrt{\frac{O}{3\pi}}$ folgt $O = 3\pi r^2$. Eingesetzt in $V = \frac{O}{3}\cdot\sqrt{\frac{O}{3\pi}}$:

$V = \frac{3\pi r^2}{3}\cdot\sqrt{\frac{3\pi r^2}{3\pi}} = \pi r^2\cdot\sqrt{r^2} = \pi r^3$ (für r >0).

Ortskurve: $y = \pi x^3$ bzw. $V = \pi r^3$.

CAS-Lösung dieser Aufgabe (TI Nspire)

Ich beginne die Rechnung an der Stelle, an der die Zielfunktion $V(r) = -\frac{1}{2}\pi r^3 + \frac{1}{2}Or$ erstellt worden ist.



Nach der Definition der Funktion lässt man die Ableitung als v1(r) berechnen und anzeigen.

(V'' habe ich hier weggelassen)

Lösung der Extremwertbedingung $V'(r) = 0$. Ergebnis: $r = \frac{\sqrt{3 \cdot O}}{3 \cdot \sqrt{\pi}}$

(Das ist dasselbe wie oben: $r = \sqrt{\frac{O}{3\pi}}$.)

Zugehörendes maximales Volumen; $V\left(\frac{\sqrt{3 \cdot O}}{3 \cdot \sqrt{\pi}}\right) = \frac{O^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{3}}{9 \cdot \sqrt{\pi}}$.

(Manuell: $V = \frac{O}{3} \cdot \sqrt{\frac{O}{3\pi}}$)

Dann die Berechnung der Gleichung der Ortskurve.

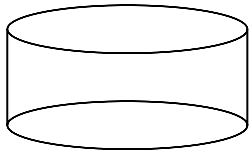
Man stellt $r = \frac{\sqrt{3 \cdot O}}{3 \cdot \sqrt{\pi}}$ nach O um und erhält $O = 3 \cdot \pi \cdot r^2$.

Dies wird in $V\left(\frac{\sqrt{3 \cdot O}}{3 \cdot \sqrt{\pi}}\right)$ eingesetzt, woraus $V = \pi \cdot |r^3|$ folgt.

Erst wenn man Nspire sagt, dass $r > 0$ ist, vereinfacht er zu $V = \pi r^3$!

Es ist schon erstaunlich, dass solch allgemeine Berechnungen mit CAS-Rechnern jetzt möglich sind.

b) Welcher oben offene Zylinder habe bei gegebenem Volumen eine maximale Oberfläche?



Dies ist nun eine Art Umkehrung der Aufgabenstellung.

1. Schritt: Aufstellung der vorläufigen Zielfunktion

Oberfläche des Zylinders: $O(r,h) = 2\pi r \cdot h + \pi r^2$ (1)

2. Schritt: Herausfinden der Nebenbedingungen

Das Volumen ist gegeben.

Dafür gilt diese Formel: $V = \pi r^2 \cdot h$ (2)

3. Schritt: Aufstellen der endgültigen Zielfunktion

Auch hier hat man prinzipiell 2 Möglichkeiten:

(a) Umstellung nach h: $V = \pi r^2 \cdot h$ (3a)

$h = \dfrac{V}{\pi r^2}$

Eingesetzt in die Zielfunktion: $O(r) = 2\pi r \cdot \dfrac{V}{\pi r^2} + \pi r^2 = \boxed{\dfrac{2V}{r} + \pi r^2}$

(b) Umstellung nach r: $r^2 = \dfrac{V}{\pi h} \Rightarrow r = \sqrt{\dfrac{V}{\pi h}}$

Eingesetzt in die Zielfunktion: $O(r) = 2\pi\sqrt{\dfrac{V}{\pi h}} \cdot h + \pi\dfrac{V}{\pi h} = 2\sqrt{\dfrac{V\pi}{h}} + \dfrac{V}{h}.$ (3b)

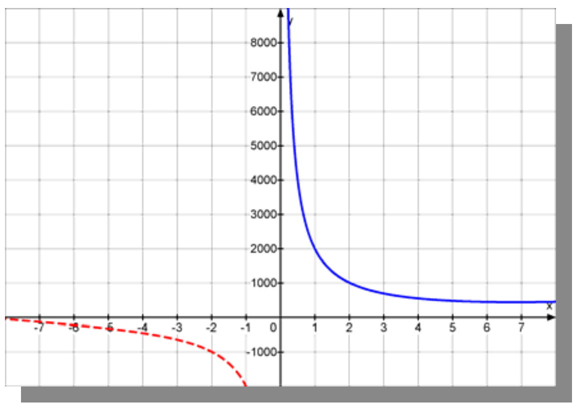
Auch hier ist (3a) die einfachere Funktion, mit der wir weiterarbeiten wollen.

4. Schritt: Festlegung des Definitionsbereichs für die Zielfunktion

Zielfunktion: $O(r) = \pi r^2 + \dfrac{2V}{r}$

Auch hier ist natürlich r positiv, aber gibt es eine obere Grenze für r?

Das Schaubild für V = 1000 (cm^3) zeigt, dass beliebig große Radien möglich sind. Durch eine entsprechend geringe Höhe kann man das Volumen konstant halten!

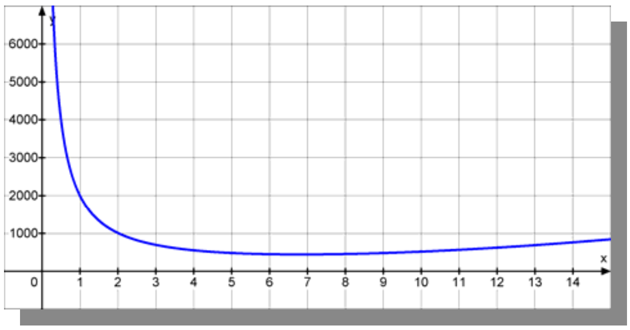


$D_r =]\,0\,;\infty\,[\,.$

Man erkennt übrigens keinen Extrempunkt!

Oder doch?

Es ist nur eine Frage des Ausschnitts!



Extremwertberechnung mit Ableitungen

Zielfunktion: $O(r) = \pi r^2 + \dfrac{2V}{r}$

Für die Ableitung umschreiben in: $O(r) = \pi r^2 + 2V \cdot r^{-1}$

Ableitungen: $O'(r) = 2\pi r - 2V \cdot r^{-2} = 2\pi r - \dfrac{2V}{r^2} = \dfrac{2\pi r^3 - 2V}{r^2} = 2\dfrac{\pi r^3 - V}{r^2}$

$O''(r) = 2\pi + 4V \cdot r^{-3} = 2\pi + \dfrac{4V}{r^3}$

Extremwertbedingung: $O'(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \pi r^3 - V = 0$

$\pi r^3 = V \quad \Rightarrow \quad r^3 = \dfrac{V}{\pi}$

$r_E = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$.

Kontrolle: $O''(r) = 2\pi + \dfrac{4V}{r_E^3} > 0$

Also liegt ein Minimum vor!

Minimale Oberfläche: $O\left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}\right) = \pi \cdot \left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}\right)^2 + \dfrac{2V}{\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}} = \sqrt[3]{\dfrac{\pi^3 \cdot V^2}{\pi^2}} + 2V \cdot \sqrt[3]{\dfrac{\pi}{V}}$

$= \sqrt[3]{V_2 \cdot \pi} + 2 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{V^3 \cdot \pi}{V}} = \sqrt[3]{V^2 \cdot \pi} + 2 \cdot \sqrt[3]{V^2 \cdot \pi} = 3 \cdot \sqrt[3]{V^2 \cdot \pi}$

Randwertbetrachtung: $\lim\limits_{r \to 0} O(r) = \lim\limits_{r \to 0}\left(\pi r^2 + \dfrac{2V}{r}\right) = \infty$

$\lim\limits_{r \to \infty} O(r) = \lim\limits_{r \to \infty}\left(\pi r^2 + \dfrac{2V}{r}\right) = \infty$

Also liegt ein absolutes Minimum vor!

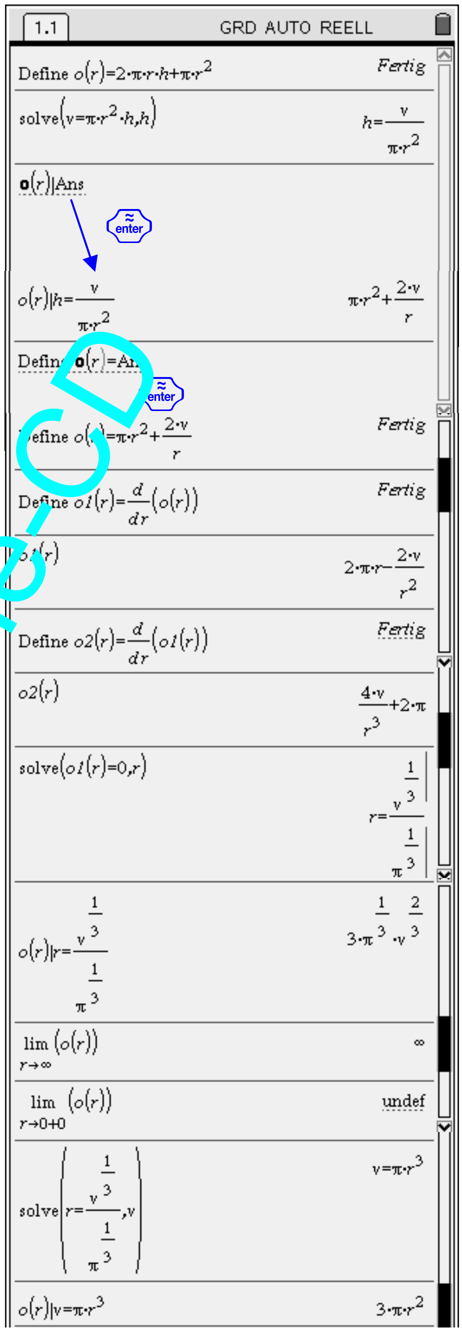
Der **Tiefpunkt** des Schaubilds hat diese Koordinaten: $V\left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}} \mid 3 \cdot \sqrt[3]{V^2 \cdot \pi}\right)$

Und die Tiefpunkte liegen auf der **Ortskurve**: $V = 3\pi r^2$ für r>0.

($r_E = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$ umstellen nach $V = \pi r^3$ und einsetzen in $O = 3 \cdot \sqrt[3]{V^2 \cdot \pi}$!)

CAS-Lösung dieser Aufgabe (TI Nspire)

Man schreibt etwa dasselbe auf wie bei der händischen Lösung, nur weniger Zwischenrechnungen.
Hier die zugehörigen Screenshots:



2. Zeile: $V = \pi r^2 h$ wird nach h umgestellt und

(3. Zeile) in O(r) eingesetzt.

Neue Definition von O.

Ableitungen

Extremwertbedingung lösen: $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

Und in O(r) einsetzen (mit ans!) ergibt $O_{min} = 3\sqrt[3]{\pi \cdot V^2}$

Randwerte.

Gegen 0 nicht zu finden, weil von rechts gehen $+\infty$

und von links gegen $-\infty$.

Ortskurve der Tiefpunkte:

$O_{min} = 3 \cdot \sqrt[3]{\pi \cdot V^2}$ nach V auflösen und

In O(r) einsetzen ergibt $V = 3\pi r^2$.

Und zum Schluss die Scharkurven:

$O(r) = \pi r^2 + \frac{2V}{r}$ mit V als Parameter bzw.

$f(x) = \pi \cdot x^2 + \frac{2t}{x}$ für t (also V) von 100 bis 2000, step: 200.

Zusammen mit der Ortskurve der Tiefpunkte: $y = 3\pi \cdot x^2$